Dans tout ce chapître on travaille avec des espaces vectoriels complexes. $\mid z \mid$ représente le module du complexe z et $\overline{z}$ son conjugué z.

On va chercher à étendre les propriétés vues dans le chapître des espaces euclidiens.

On reprend exactement le même plan.

1 Produit scalaire hermitien

Soit E un espace vectoriel complexe.

1.1 Formes sesquilinéaires hermitiennes associées

Définition 1

Soit φ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$.
On dit que φ est une forme sesquilinéaire sur E si et seulement si
φ est linéaire par rapport à la deuxième variable et sesquilinéaire par rapport à la première,
cad pour tout $(x,y) \in E^2$:

- $y \mapsto \varphi(x,y)$ *est linéaire*
- $x \mapsto \varphi(x,y)$ *vérifie :*
  $\forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2\ \forall(x_1,x_2) \in E^2\ \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda_1}\varphi(x_1,y) + \overline{\lambda_2}\varphi(x_2,y)$.

Définition 2

Une forme sesquilinéaire φ est dite hermitienne ssi $\forall(x,y) \in E^2\ \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

Remarque pour une forme sesquilinéaire hermitienne φ sur E, $\forall x \in E\ \varphi(x,x) \in \mathbb{R}$.

Proposition 1

L'ensemble des formes sesquilinéaires hermitiennes sur E est un espace vectoriel complexe.

Identités de polarisation

Soit φ une forme sesquilinéaire hermitienne. Soit $(x,y) \in E^2$.

- $\varphi(x+y,x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\ \mathrm{Re}(\varphi(x,y))$
- $\varphi(x+iy,x+iy) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) - 2\ \mathrm{Im}(\varphi(x,y))$
- $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y)] - \frac{i}{4}[\varphi(x+iy,x+iy) - \varphi(x-iy,x-iy)]$
- $\mathrm{Re}(\varphi(x,y)) = \frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y)]$
- $\mathrm{Im}(\varphi(x,y)) = -\frac{1}{4}[\varphi(x+iy,x+iy) - \varphi(x-iy,x-iy)]$

1.2 Produit scalaire hermitien

Définition 3

On appelle produit scalaire hermitien sur E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive cad toute application φ de E^2 dans $\mathbb{C}$ telle que :

1. φ est une forme sesquilinéaire hermitienne
2.$\forall x \in E\ \varphi(x,x) \geqslant 0$
3. $\forall x \in E\ \varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = \vec{0}$

Définition 4

Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien complexe.
Si, de plus, il est de dimension finie, on dira que c'est un espace hermitien.

Caractérisation d'un produit scalaire hermitien

Pour prouver que $\varphi : E^2 \to \mathbb{C}$ définit un produit scalaire hermitien sur E, il suffit de prouver que :

1. Pour tout vecteur x, $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire
2. $\forall(x,y) \in E^2\ \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$
3. $\forall x \in E\ \varphi(x,x) \geqslant 0$
4. $\forall x \in E\ \varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = \vec{0}$

Notations usuelles : $B(x,y)$, (x/y), $< x,y >$, $x \cdot y$

Remarque importante : si un vecteur x de E vérifie $\forall y \in E\ (x/y) = 0$, alors $x = \vec{0}$

1.3 Exemples et contre-exemples

1. $E = \mathbb{C}^n \qquad x \cdot y = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x_i}\ y_i = {}^t\overline{X}Y$.

2. $E = \mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{C}) \qquad (f/g) = \displaystyle\int_a^b \overline{f(t)} g(t)\ dt.$

3. $E = \mathcal{C}_{2\pi} \qquad (f/g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\ dt$

4. $E = \{f : I \to \mathbb{C}$ continue et de carré intégrable sur $I\} \qquad (f/g) = \displaystyle\int_I \overline{f(t)} g(t)\ dt.$

5. $E = \mathbb{C}^n[X] \quad \begin{cases} (P/Q) = \sum\limits_{i=0}^{n} \overline{p_i}\ q_i \ si\ P = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} p_i\ X^i\ et\ Q = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} q_i\ X^i \\ B(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 \overline{P(t)} Q(t)\ dt \end{cases}$

6. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad (A/B) = \mathrm{tr}({}^t\bar{A}B)$

1.4 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Proposition 2 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

> Soit E un espace préhilbertien complexe muni d'un produit scalaire noté $(./.)$.
> $\forall (x,y) \in E^2 \quad |\ (x/y)\ | \leqslant \sqrt{(x/x)\ (y/y)}$
> On a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration :

démonstration spécifique au cas complexe. □

Proposition 3 *Inégalité de Minkowski*

> Soit E un espace préhilbertien complexe muni d'un produit scalaire noté $(./.)$.
> $\forall (x,y) \in E^2 \quad \sqrt{(x+y/x+y)} \leqslant \sqrt{(x/x)} + \sqrt{(y/y)}$
> On a égalité si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+\ x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Démonstration :

démonstration presque semblable au cas réel. □

1.5 Norme hermitienne

Définition 5

> *Soit E un espace préhilbertien complexe. On pose $\parallel x \parallel = \sqrt{(x/x)}$.*
> *On définit ainsi une norme sur E dite norme hermitienne.*

Relations entre norme et produit scalaire : identités de polarisation.

> Soit E un espace préhilbertien complexe. Soit $(x,y) \in E^2$.
> - $\parallel x+y \parallel^2 = \parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2 + 2\ \mathrm{Re}((x/y))$
> - $\parallel x+iy \parallel^2 = \parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2 - 2\ \mathrm{Im}((x/y))$
> - $(x/y) = \frac{1}{4}[\parallel x+y \parallel^2 - \parallel x-y \parallel^2] - \frac{i}{4}[\parallel x+iy \parallel^2 - \parallel x-iy \parallel^2]$
> - $\parallel x+y \parallel^2 + \parallel x-y \parallel^2 = 2(\parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2)$

1.6 Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien complexe muni d'une forme hermitienne notée $(./.)$.

Les définitions et propriétés sont identiques au cas réel ; seules diffèrent les démonstations (en particulier, celle du théorème de Pythagore qui fait intervenir les parties réelles des produits scalaires hermitiens).

Définitions :

▷ vecteurs orthogonaux

Définition 6

Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si et seulement si $(x/y) = 0$.

▷ orthogonal d'une partie

Définition 7

Soit A une partie de E. On appelle orthogonal de A noté $A^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\forall a \in A\ (x/a) = 0$.

Proposition 4

Pour toutes parties A et B : $A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$ et $A^{\perp} = (Vect A)^{\perp}$

Démonstration :
démonstration semblable au cas réel. □

Proposition 5

Pour toute partie A de E, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :
démonstration semblable au cas réel. □

Proposition 6

Pour tout sous-espace vectoriel F, $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$, $F \cap F^{\perp} = \{\vec{0}\}$ et $E^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

Démonstration :
démonstration semblable au cas réel. □

▷ Famille orthogonale, famille orthonormale, vecteurs unitaires

Définition 8

Une famille de vecteurs de E $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale si et seulement les vecteurs de cette famille sont 2 à 2 orthogonaux.
De plus, si les vecteurs sont unitaires, on dira que la famille est orthonormale, cad $\forall (i, , j) \in I^2 (e_i/e_j) = \delta_i^j$.

Proposition 7

Toute famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.

Démonstration :
démonstration semblable au cas réel. □

Proposition 8

Pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ orthogonale finie de vecteurs de E $\quad \| \sum_{i=1}^{p} x_i \|^2 = \sum_{i=1}^{p} \| x_i \|^2$.

Démonstration :
Pour $n = 2$, soient x_1 et x_2 deux vecteurs orthogonaux ; $\| x_1 + x_2 \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x1/x2) = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2$.
Supposons la relation vraie au rang n et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. Soient $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ une famille orthogonale finie de vecteurs de E.
On a alors $\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \|^2 = \| \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \|^2 = \| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 + \| x_{n+1} \|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(x_i/x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2 + \| x_{n+1} \|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \| x_i \|^2$.
On conclut grâce au principe de récurrence. □

La réciproque est fausse y compris pour $n = 2$.

▷ Sous-espaces vectoriels orthogonaux, sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.

Définition 9

Deux sous-espaces vectoriels de E sont dits orthogonaux lorsque tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre.

Proposition 9

Des sous-espaces vectoriels 2 à 2 orthogonaux sont en somme directe.

Démonstration :

démonstration semblable au cas réel. □

En dimension finie caractérisation de $F^\perp$ à l'aide d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ de F :
$x \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1, q]\!] (e_i/x) = 0.$

1.7 Projections et symétries orthogonales

Définition 10

Soit F un sous-espace vectoriel de E qui admette un sous-espace vectoriel H supplémentaire et orthogonal ($F \overset{\perp}{\oplus} H = E$).
La projection sur F parallèlement à H est appellée projection orthogonale sur F.

Proposition 10

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. p est un projecteur orthogonal $\iff p \circ p = p$ et $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$.

Démonstration :

démonstration semblable au cas réel. □

2 Espace hermitien

Sauf mention explicite du contraire, dans ce paragraphe E est un espace hermitien. On notera $n = \dim E$. Remarquons que tout sous-espace vectoriel de E reste un espace vectoriel hermitien.

2.1 Bases orthonormales

▷ Définition d'une base orthogonale, orthonormale.

Définition 11

On appelle base orthogonale de E toute base de E formée d'une famille de vecteurs 2 à 2 orthogonaux.
On appelle base orthonormale de E toute base de E formée de vecteurs unitaires 2 à 2 orthogonaux.

▷ Existence de bon

Proposition 11

Tout espace hermitien non réduit à $\{\vec{0}\}$ admet au moins une base orthonormale

Démonstration :

La démonstration est semblable au cas réel en considérant la forme linéaire $\varphi : u \mapsto (e_1/u)$. □

▷ Ecriture dans une bon.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soient x et y des vecteurs de E.

$$x = \sum_{i=1}^{n} (e_i/x)\ e_i \quad , \quad (x/y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{(e_i/x)} (e_i/y) = {}^t\overline{X} Y \quad \text{et} \quad \| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} | (e_i/x) |^2 = {}^t\overline{X} X \ .$$

▷ **Proposition 12**

$$\boxed{\forall f \in E^* \ \exists! a \in E \ / \ \forall x \in E \ f(x) = (a/x)}$$

Démonstration :
Soit $f \in E^*$. Choisissons une base orthonormale de E $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E, on a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, ce qui s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a/x)$ où a est un vecteur de E défini par $a = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(e_i)} e_i$. □

Remarquons que cette démonstration s'adapte très bien au cas réel aussi.

▷ **Proposition 13**

Soit E un espace préhilbertien complexe de dimension quelconque.
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux dans E

Démonstration : démonstration similaire en prenant garde à l'ordre des composantes des produits scalaires.
▷ Si $F = \{\vec{0}\}$, $F^\perp = E$ et la propriété est vérifée.
▷ Sinon, choisissons $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormale de F. Soit $x \in E$.Posons $y = \sum_{i=1}^{p} (e_i/x) e_i$ et $z = x - y$.
$y \in F$ et $\forall i_0 \in [\![1, p]\!] \quad (z/e_{i_0}) = (x/e_{i_0}) - (y/e_{i_0}) = (x/e_{i_0}) - \overline{(e_{i_0}/x)} = 0$, donc $z \in F^\perp$.
On vient de prouver que tout vecteur de E s'écrit sous la forme de la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.
Comme $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$, ces deux espaces sont donc supplémentaires. □

Conséquences :

1. Dans un espace hermitien, on a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ pour tout sous-espace vectoriel F.
   En particulier, $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.
2. Toute famille orthonormale d'un espace hermitien se complète en une base orthonormale.
3. Dans un espace hermitien, pour tout sous-espace vectoriel F , $F = (F^\perp)^\perp$.

▷ **Proposition 14**

Si H est un hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, $a = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} e_i$ est un vecteur normal à H

2.2 Projections orthogonales sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace préhilbertien complexe de dimension quelconque.
Soit F un sous-espace vectoriel de **dimension finie**.
On note p_F la projection orthogonale sur F.

▷ **Proposition 15**

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une bon de F. $\forall x \in E \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_j/x) e_j$.

▷ **Proposition 16**

$\| x - p_F(x) \|$ représente la distance de x à F, cad $\| x - p_F(x) \| = \inf_{y \in F} \| x - y \|$.

$p_F(x)$ est l'unique vecteur de F réalisant ce minimum.
$\forall x \in E \quad \| x \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) \|^2$

▷ **Proposition 17 Inégalité de Bessel**

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormale de E. $\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^{p} | (e_i/x) |^2 \leqslant \| x \|^2$

Expressions de $p_F(x)$ lorsque F est une droite, un hyperplan.

∘ Si $\mathcal{D}$ est une droite de E dirigée par le vecteur $\vec{u}$, alors $\forall x \in E \ p_{\mathcal{D}}(x) = (\vec{u}/x) \dfrac{\vec{u}}{\| \vec{u} \|^2}$

∘ Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan de E de vecteur normal $\vec{n}$, alors $\forall x \in E \ p_{\mathcal{H}}(x) = x - (\vec{n}/x) \dfrac{\vec{n}}{\| \vec{n} \|^2}$

Application Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une famille orthogonale de vecteurs de E 2 à 2 orthogonaux non nuls $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ telle que $\forall j \in [\![1, q]\!]$ $Vect(u_1, \dots, u_j) = Vect(e_1, \dots, e_j)$.

Démonstration : même démonstration de l'existence que celle faite dans le cas euclidien en faisant attention aux conjugués

▷ Comme $Vect(u_1) = Vect(e_1)$, choisissons $e_1 = u_1$.

▷ Soit $p \in \mathbb{N}^*$.Supposons construits les vecteurs $e_1, \cdots, e_p$ vérifiant les conditions demandées.

Comme $e_{p+1} \in Vect(e_1, \dots, e_{p+1}) = Vect(e_1, \dots, e_p, u_{p+1})$, posons $e_{p+1} = u_{p+1} + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Pour $j \in [\![1, p]\!]$, $(e_{p+1}/e_j) = (u_{p+1}/e_j) + \sum\limits_{i=1}^{p} \overline{\lambda_i}(e_i/e_j) = (u_{p+1}/e_j) + \overline{\lambda_j}(e_j/e_j)$. Donc $e_{p+1} \perp e_j \iff \overline{\lambda_j} = -\dfrac{(u_{p+1}/e_j)}{(e_j/e_j)}$.

On prend alors $e_{p+1} = u_{p+1} - \sum\limits_{i=1}^{p} \overline{(u_{p+1}/e_j)} \dfrac{e_j}{\| e_j \|^2} = u_{p+1} - \sum\limits_{i=1}^{p} (e_j/u_{p+1}) \dfrac{e_j}{\| e_j \|^2} = u_{p+1} - P_{F_p}(u_{p+1})$ où F_p est l'esapce vectoriel engendré par $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$.

e_{p+1} est non nul car sinon $u_{p+1} \in Vect(e_1, \dots, e_j) = Vect(u_1, \dots, u_j)$, ce qui contredit le caractère libre de la famille des (u_i).

On construit ainsi par récurrence les vecteurs $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ demandés. □

Pour obtenir une famille orthonormale, il suffit de normaliser chacun des vecteurs.

2.3 Symétries orthogonales

Définition d'une symétrie orthogonale, d'une réflexion comme dans le cas réel.

Expressions de $s_F(x)$ lorsque F est une droite, un hyperplan.

- ◦ Si $\mathcal{D}$ est une droite de E dirigée par le vecteur $\vec{u}$, alors $\forall x \in E$ $s_{\mathcal{D}}(x) = 2(\vec{u}/x)\dfrac{\vec{u}}{\| \vec{u} \|^2} - x$
- ◦ Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan de E de vecteur normal $\vec{n}$, alors $\forall x \in E$ $s_{\mathcal{H}}(x) = x - 2(\vec{n}/x)\dfrac{\vec{n}}{\| \vec{n} \|^2}$

Table des matières